12. Ли А.С. Формирование логико-структурной схемы управления устойчивым развитием социально-экономических систем/ А.С. Ли, В.В. Казаков//Вестник Томского государственного университета. - №348 (июль). – 2011. – С. 100-103.

УДК 519.832:519.86:330.43:339.138

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МАРКЕТИНГА

Полшков Ю.Н., к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и математических методов в экономике Донецкого национального университета

Постановка проблемы. В работе [1] рассматривалась проблема построения эконометрической модели жизненного цикла товара (далее ЖЦТ). Однако эта задача исследовалась без учёта взаимовлияния товаров на рынке. Для более адекватного видения процесса следует разработать комплексную математическую модель.

Анализ последних достижений и публикаций. Рассмотрим новый товар, выпущенный корпорацией. На ЖЦТ данного товара будут оказывать влияние замещающие товары других производителей. Такие ситуации удобно рассматривать с точки зрения теории игр. Данными вопросами занимались отечественные и зарубежные учёные: Витлинский В.В., Верченко П.И., Сигал А.В., Наконечный Я.С. (библиография учебного пособия [2]), Акулов В.Б., Альберт М., Астахова Н.И., Бернард А., Вершигора Е.Е., Гатторна Дж., Кристофер М., Лукашевич В.В., Николайчук В.Е., Мескон М., Мильнер Б., Минцберг Г., Попадюк К.Н., Соловьёв Б.А., Стерлигова А.Н., Тичкиевич С., Уотсон А., Федосеев В.В., Фишер М., Харрисон А., Хедоури Ф., Ховард К., ван Хоек Р., Хожемпо В.В., Цыпкин Ю.А., Шив Д., Эриашвили Н.Д. (библиография учебника [3]) и др.

Формулировка нерешённых проблем. Обычно кривую ЖЦТ изображают в виде несимметричного колокола. Горизонтальная ось t – номер временного периода. Вертикальная ось y – объём продаж. График условно делят на пять этапов: 1) внедрение, 2) рост, 3) зрелость, 4) насыщение и 5) спад (рис. 1).

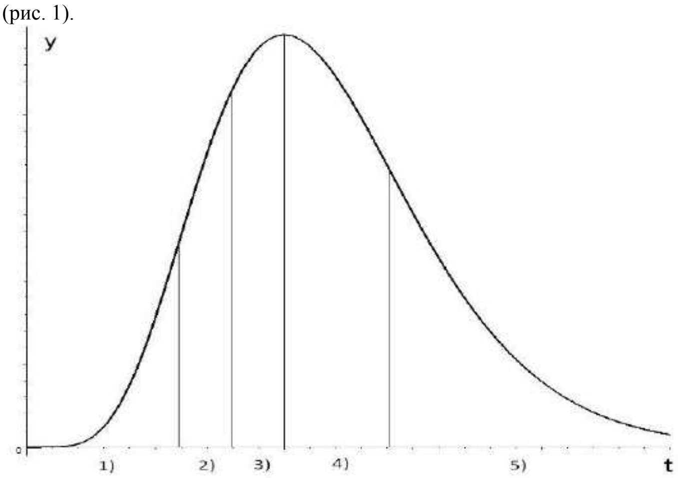

Рис. 1. График кривой ЖЦТ

Нерешённая проблема состоит в выявлении влияния аналогичных товаров на объём продаж товара данной корпорации. Имеет смысл продолжить совершенствование методов оценивания параметров эконометрической модели ЖЦТ (начало положено в статье [1]).

Цель работы. Для понимания сути первой проблемы приведём условный пример игры в «новые» и «старые» товары.

Два производителя телевизоров конкурируют друг с другом на рынке. Наша корпорация (первый производитель) выходит на рынок с «новыми» товарами – тремя моделями с плазменным экраном (ПЭ). Для этих товаров нам нужно определить кривые ЖЦТ. Конкурент производит «старые» товары – две модели телевизоров с жидкокристаллическим экраном (ЖКЭ).

Проведённые исследования показали, что при наличии 1-й модели ЖКЭ объём продаж 1-й модели ПЭ предположительно снизится до 40% (составит 0,4 от поступивших в продажу), для 2-й модели ПЭ – в среднем составит 0,5 и т.д. (табл. 1). Снижения объёмов продаж связаны с ценовой политикой, консерватизмом покупателей, известностью марки товара, рекламной компанией и мн. др. причинами.

Табл.1.

Объём продаж первого производителя

		Второй игрок (ЖКЭ)	
		1-я модель	2-я модель
Первый игрок (ПЭ)	1-я модель	0,4	0,8
	2-я модель	0,5	0,9
	3-я модель	0,7	0,8

Выигрыш первого игрока является проигрышем для второго. Платёжная матрица первого игрока A^+, второго – A^-:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,5 & 0,9 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}, \qquad A^- = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,8 \\ -0,5 & -0,9 \\ -0,7 & -0,8 \end{pmatrix}.$$

Перед нами матричная игра двух лиц. Т.к.

$$a_{ij}^+ + a_{ij}^- = 0, \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}),$$

то это игра с нулевой суммой.

Достаточно рассматривать игру с точки зрения одного из игроков (например, первого). Поэтому в дальнейшем будем иметь дело с платёжной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,5 & 0,9 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Приведённый пример показывает, что с помощью методов теории игр можно отобразить влияние одних товаров на другие. Поэтому целью работы является разработка комплексной модели ЖЦТ, основанной на различных математических концепциях.

Результаты исследования. Рассмотрим в общем виде игру в «новые» и «старые» товары с точки зрения первого игрока (нашей корпорации). Поэтому в дальнейшем будем иметь дело с платёжной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальная стратегия обеспечивает игроку при многоразовом повторения игры максимально возможный средний выигрыш V, который называют ценой игры. Решить игру в чистых стратегиях – означает найти оптимальную стратегию для каждого игрока и цену игры. Решение находят с помощью метода максимина и минимакса.

Первый игрок, не зная достоверно поведение второго, для каждой своей стратегии i определяет минимальный (т.е. гарантированный) выигрыш $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$. Среди чисел α_i выбирают максимальный элемент:

$$\max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha.$$

Число α называется нижней чистой ценой игры или максимином. Номер строки i_0, в которой находится α, определит номер предпочтительной стратегии первого игрока.

Для каждой стратегии j второго игрока выбираем максимальные элементы $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Определяем среди чисел β_j минимальный элемент:

Число β – верхняя чистая цена игры или минимакс. Номер столбца j_0, в котором находится β, определяет номер предпочтительной стратегии второго игрока.

По теореме о максимине и минимаксе для любой матричной игры двух лиц с нулевой суммой и ценой игры V имеет место неравенство: $\alpha \le V \le \beta$. Если же в игре с матрицей A нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры $V*$:

$$V* = \alpha = \beta.$$

На практике далеко не все платёжные матрицы имеют седловые точки, т.е. не любая матричная игра имеет оптимальные чистые стратегии. В подобном случае применяют не чистые, а смешанные стратегии. Т.е. первый игрок применяет свои m стратегий с определёнными вероятностями. Вектор вероятностей $X = (x_1; x_2; \dots; x_m)$ неизвестен, причём $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$. Для второго игрока неизвестен вектор вероятностей $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$, с которыми он принимает свои стратегии, где $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$.

Векторы X и Y – смешанные стратегии первого и второго игроков, соответственно. Согласно основной теореме матричных игр (теорема фон Неймана) любая матричная игра двух лиц с нулевой суммой имеет решение в виде смешанных стратегий.

Задачи подобного рода хорошо изучены (см., например, [2, p. 1]). Поэтому приведём кратко алгоритм их решения.

Проблема может быть сведена к задаче линейного программирования:

$$Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \ge 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \ge 1, \end{cases}$$

$$t_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}).$$

Здесь $t_1 = \dfrac{x_1}{V}, t_2 = \dfrac{x_2}{V}, \dots, t_m = \dfrac{x_m}{V}, Z = \dfrac{1}{V}$. Аналогично для второго игрока, сделав замену переменных $w_1 = \dfrac{y_1}{V}, w_2 = \dfrac{y_2}{V}, \dots, w_n = \dfrac{y_n}{V}, F = \dfrac{1}{V}$, получим вторую задача линейного программирования:

$$F = w_1 + w_2 + \dots + w_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + ... + a_{1n}w_n \le 1, \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{2n}w_n \le 1, \\ .... \\ a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + ... + a_{mn}w_n \le 1, \end{cases}$$
$$w_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Первая и вторая задачи являются двойственными задачами линейного программирования. В Microsoft Excel такие задачи решают с помощью надстройки «Поиск решения».

Сделав обратную замену переменных, запишем оптимальные смешанные стратегии игроков X^* и Y^*, а также чистую цену игры V^*. Найденный вектор вероятностей X^* – это рекомендация для нашей корпорации, как корректировать объём производства товаров оптимальным образом.

В работе [1] предложена модель тренда ЖЦТ в виде экспоненциально-степенной функции:

$$y_i = \exp(at_i) \cdot t_i^{\,b} \cdot \varepsilon_i,$$

где y – объём продаж, t – номер временного периода, i – номер фактического наблюдения ($i = 1, 2, ..., n$), ε_i – отклонение, a и b – неизвестные параметры. Причём $a < 0$, $b > 0$.

Проблема разбивки ЖЦТ на отдельные этапы решена автором в исследовании [1]. Из данной работы позаимствуем нужные сведения (табл. 2).

Табл. 2. Этапы ЖЦТ при трендовой кривой $\hat{y}_t = \exp(\hat{a}t) \cdot t^{\hat{b}}$ ($\hat{a} < 0$, $\hat{b} > 0$, $\hat{b} \ne 1$)

№ этапа	Название	Границы	Дополнительная информация
1	Внедрение	$[0; t_1]$	$t_1 = \dfrac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}}}{\hat{a}}$ – меньшая точка перегиба линии тренда
2	Рост	$\left[t_1; \dfrac{t_1 + t_0}{2}\right]$	$\dfrac{t_1 + t_0}{2}$ – середина отрезка $[t_1; t_0]$
3	Зрелость	$\left[\dfrac{t_1 + t_0}{2}; t_0\right]$	$t_0 = -\dfrac{\hat{b}}{\hat{a}}$ – точка максимума кривой ЖЦТ
4	Насыщение	$[t_0; t_2]$	$t_2 = \dfrac{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}}}{\hat{a}}$ – большая точка перегиба линии тренда
5	Спад	$[t_2; T_0]$	T_0 – корень неравенства $e^{\hat{a}t} \cdot t^{\hat{b}} < C_0$, где C_0 – нижний лимит объёма продажи товара (устанавливается производителем)

Оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ найдём методом максимального правдоподобия (далее ММП). Проведём линеаризацию модели $y_i = \exp(at_i) \cdot t_i^{\,b} \cdot \varepsilon_i$, взяв натуральные логарифмы от обеих частей уравнения регрессии и введя новые обозначения:

$$Y_i = at_i + bT_i + e_i,$$

где $Y_i = \ln(y_i)$, $T_i = \ln(t_i)$, $e_i = \ln(\varepsilon_i)$.

Предположим, что отклонения e_i являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами. Составим функцию правдоподобия:

$$L(Y_1, ..., Y_n, a, b, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(Y_i - at_i - bT_i)^2}{2\sigma^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot (\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - at_i - bT_i)^2\right).$$

Натуральный логарифм функции правдоподобия равен

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \cdot \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - at_i - bT_i)^2.$$

Согласно ММП применим необходимые условия экстремума функции многих переменных:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - at_i - bT_i)\cdot t_i\ ,$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial b} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - at_i - bT_i)\cdot T_i\ ,$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - at_i - bT_i)^2\ .$$

Приравняв частные производные к нулю, получим систему нормальных уравнений (третье уравнение нас не интересует, т.к. нахождение дисперсии σ^2 не входило в наши планы):

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n}t_i^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i\cdot T_i) = \sum_{i=1}^{n}(t_i\cdot Y_i); \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i\cdot T_i) + b\cdot\sum_{i=1}^{n}T_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(T_i\cdot Y_i). \end{cases}$$

Решив данную систему двух линейных уравнений, найдём оценки неизвестных параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Подставив их в уравнение $\hat{y}_t = \exp(\hat{a}t)\cdot t^{\hat{b}}$, запишем трендовую модель ЖЦТ.

На этом обсуждение математической модели завершено. Заметим, что специалисты в области маркетинга должны критически относиться к любым моделям. Моделирование не может заменить реальную экономику, поэтому нужно учитывать обратную связь и корректировать модель при поступлении новой информации. Если же модель плохо адаптируется к существующим реалиям, то лучше от неё отказаться.

Выводы и предложения. В работе предложена модель ЖЦТ, базирующаяся на применении теории игр и статистических решений в комплексе с эконометрическими методами. Рекомендуется моделировать объём производства с помощью матричных игр с нулевой суммой. Оптимальная линии поведения корпорации предполагает следующие действия:

- по имеющимся статистическим данным оценить долю замещения выпускаемого товара товарами конкурента;
- записать платёжную матрицу и применить метод максимина и минимакса;
- при наличии седловой точки найти оптимальные чистые стратегии и цену игры (гарантированный выигрыш);
- при отсутствии седловой точки, определить оптимальные смешанные стратегии методами линейного программирования.

Как и ранее, автор рассматривал экспоненциально-степенную модель ЖЦТ. Оценивание неизвестных параметров модели осуществлялось с помощью ММП.

РЕЗЮМЕ
В этой работе получена комплексная модель жизненного цикла товара. Модель основана на теории игр и статистических решений. Неизвестные параметры модели оцениваются эконометрическими методами.
Ключевые слова: жизненный цикл товара, экспоненциально-степенная модель, метод максимального правдоподобия.
РЕЗЮМЕ
В цій роботі одержана комплексна модель життєвого циклу товару. Модель базується на теорії ігор та статистичних рішень. Невідомі параметри моделі оцінюються економетричними методами.
Ключові слова: життєвий цикл товару, експоненціально-степенева модель, метод максимальної правдоподібності.
SUMMARY
In this work the complex model of the life cycle of the goods is received. The model is based on the games theory and statistical decisions. Unknown parameters of model are estimated by econometrics methods.
Key words: the life cycle of the goods, the exponential-power model, the maximum likelihood method.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ:

1. Полшков Ю.Н. Об особенностях математического моделирования жизненного цикла товара // Вісник Донецького національного університету. Серія В. Економіка і право. Спецвипуск, том 2. – Донецьк: ДонНУ, 2011. – С. 214-219.
2. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник / [В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний]; За ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.: ил., табл. – Бібліогр.: с. 439–446. – ISBN 966-574-318-X.
3. Маркетинг: учебник для вузов / [Эриашвили Н.Д., Ховард К., Цыпкин Ю.А. и др.]; под ред. Н. Д. Эриашвили. – [2-е изд.]. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 623 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 506–509. – ISBN 5-238-00088-X.

УДК 339.9

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПРИРОДИ ЕКОНОМІЧНИХ ДИСБАЛАНСІВ В КОНТЕКСТІ КРИЗОВИХ ПОТРЯСІНЬ

Резнікова Н.В., к.е.н., доцент кафедри світового господарства та міжнародних економічних відносин Інституту міжнародних відносин Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Постановка проблеми. Проблема глобальних дисбалансів напряму пов’язана з нерівномірним розподілом боргу у світовій економіці, проте в більш вузькому контексті описується в термінах дефіциту торгового балансу та зовнішнього боргу. Аналіз теоретичного доробку вчених щодо кризової складової економічного розвитку дозволить прослідкувати етапи формування уявлень, продовж яких об’єктивно розвивалася наукова доктрина економічних дисбалансів у контексті нестабільності (чи то валютної, чи то фінансової), яка